ΘΕΩΡΗΜΑ (Egoroff)

Έστω A μετρήσιμο, $V(A)<\infty$ και f_n: ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε αν f συγκλίνει κατά σημείο a.e A τότε $(\forall \varepsilon>0)(\exists B\subseteq A)$ ώστε $V(B)<\varepsilon$ και f_n: συγκλίνει ομοιόμορφα στο $A\setminus B$.

Απόδειξη

$E\subseteq A$, μηδενικό

$f: A\to \mathbb{R}$

$\lim f_n = f$, a.e A

f μετρήσιμη

$$A_{k,\lambda} := \{x\in A\setminus E : (\exists n\geq k)\ |f_n(x)-f(x)|\geq \frac{1}{\lambda}\},\ \lambda\geq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{k+1,\lambda}\subseteq A_{k,\lambda} \\ \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,\lambda} = \emptyset \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Πρότ. 14.19}} \lim_k V(A_{k,\lambda}) = V(\cap A_{k,\lambda}) = V(\emptyset) = 0$$

Έστω $\varepsilon>0$ τότε $\forall\lambda\ \exists k_\lambda : V(A_{k_\lambda,\lambda}) < \frac{1}{2^\lambda}\cdot\varepsilon$

τότε ορίζουμε ένα σύνολο

$$B := \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} A_{k_\lambda,\lambda} \quad \text{όπου}$$

$$V(B) = V\Big(\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} A_{k_\lambda,\lambda}\Big) \leq \sum V(A_{k_\lambda,\lambda}) \leq \varepsilon$$

$$x\in A\setminus B \Rightarrow x\notin B \Rightarrow x\notin \bigcup A_{k_\lambda,\lambda} \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{1}{\lambda},$$

$\Rightarrow$ Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $A\setminus B$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16)

Ορισμός

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν $\exists A_1, A_2, \dots, A_k$ μετρήσιμα σύνολα με $V(A_i) < \infty$ ξένα ανά 2 και $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ ε/ω

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i X_{A_i}(x) \quad \text{με} \quad X_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_i \end{cases}$$

$\mathcal{S}$: το σύνολο όλων των απλών συναρτήσεων

Έστω $f \in \mathcal{S}$ (δηλ. f απλή) τότε το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\int f := \sum_{i=1}^{k} \gamma_i V(A_i)$$

Αν έκανε

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j X_{B_j}(x) \quad \text{τότε ισχύει} \quad \gamma_i = \delta_j \; (*)$$

εάν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Επίσης, τα σύνολα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα ανά δύο αν είναι μη κενά και επιπλέον,

$$V(A_i) = \sum_{j=1}^{m} V(A_i \cap B_j) \quad (1)$$

$$V(B_j) = \sum_{i=1}^{k} V(A_i \cap B_j) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i V(A_i) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \sum_{j=1}^{m} V(A_i \cap B_j) =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \delta_j V(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \sum_{i=1}^{k} V(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \delta_j V(B_j)$$

Πρόταση

Αν $f \in \mathcal{S}$ τότε $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$

Απόδ

Άμεσο από τον ορισμό.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\int : f \mapsto \int f$ είναι γραμμική συνάρτηση του $\mathcal{S}$ στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστωσαν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{S}$

με $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \chi_{A_i}(x)$, και $g(x) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \chi_{B_j}(x)$

Θεωρώ $l = (i-1)m + j$

δηλαδή

$$k \begin{cases} 1, 2, \ldots, m \leftarrow i=1 \\ 1, 2, \ldots, m \leftarrow i=2 \\ \vdots \\ 1, 2, \ldots, m \leftarrow i=k \end{cases}$$

πίνακας km

Άρα, έχω ένα km σύνολο στοιχείων

$\Gamma_l := A_i \cap B_j$ και $\tau_l = \alpha\gamma_i + \beta\delta_j$, $l = 1, 2, \ldots, km$

και επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως καταλήγουμε ότι

$\alpha f + \beta g = \sum_{l=1}^{km} \tau_l \chi_{\Gamma_l}$

(πχ αν σε μια σκάλα προσθέσω μια άλλη σκάλα αυτό που θα λάβω είναι πάλι σκάλα).

όμοια και για νδο η συνάρτηση $\int$ γραμμική

$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathcal{S}$ και $f \geq g \Rightarrow \int f \geq g$

Απόδειξη

Άμεση από προηγούμενη πρόταση αν $h := f - g$.

Ορισμός:

Αν A μετρήσιμο, $\forall f \in \mathcal{S}$

$\int_A f = \int f \cdot \chi_A$

Σχολιο

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int f$$

Προταση

Αν $f, g \in \mathcal{S}$ τοτε $f \geq g \Rightarrow \int f \geq \int g$

Προταση

Εστω $f \in \mathcal{S}$ με $f \geq 0$ και A, B μετρήσιμα τοτε $A \subseteq B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

Αποδειξη

Βάσει της προηγουμενης προτασης άμου

$$f\chi_A \leq f\chi_B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f.$$

Προταση

Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $f \in \mathcal{I}$ τοτε $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$

Αποδ

Απο την προπροηγούμενη πρόταση εχουσον

$$-|f|\chi_A \leq f\chi_A \leq |f|\chi_A \Leftrightarrow$$

$$\int -|f|\chi_A \leq \int f\chi_A \Rightarrow -\int |f|\chi_A \leq \int_A f \quad ①$$

και όμοια

$$\int f\chi_A \leq \int |f|\chi_A \Leftrightarrow \int_A f \leq \int |f|\chi_A \quad ②$$

Απο ① και ② επεται το ζητούμενο

Προταση

Εστω (A_ν) ακολουθια μετρήσιμων συνόλων τετ. $\lim V(A_\nu) = 0 \Rightarrow \lim \int_{A_\nu} f = 0$, $\forall f \in \mathcal{E}$

Αποδ

f απλή $\Rightarrow$ f φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{A_\nu} |f| \leq \int_{A_\nu} M \Rightarrow \left|\int_{A_\nu} f\right| \leq \int_{A_\nu} |f| \leq \int_{A_\nu} M = M \cdot V(A_\nu)$$

$$\xRightarrow{V(A_\nu) \xrightarrow{\nu\to\infty} 0} \lim \int_{A_\nu} f = 0$$

Πρόταση

Έστω (A_ν) μια διαμέριση του A.
Αν $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ μετρήσιμα
τότε $\int_A f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{A_\nu} f \quad , \forall f \in \mathcal{S}$

Απόδειξη

Έστω μία παράσταση της $f = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot \chi_{B_i}$
και αφού $\chi_A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{A_\nu}$ τότε

$$\int_A f = \int f \chi_A = \int \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \chi_{B_i} \chi_A =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int \chi_{B_i \cap A} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, v(B_i \cap A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, v\left(B_i \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, v\left(\bigcup (B_i \cap A_\nu)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \sum_{\nu=1}^{\infty} v(B_i \cap A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, v(B_i \cap A_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int \gamma_i \chi_{B_i \cap A_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int \gamma_i \chi_{B_i} \cdot \chi_{A_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{A_\nu} f$$

Πρόταση

Έστω $(A_\nu) \uparrow$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και
$f \in \mathcal{S}$ τότε $\lim \int_{A_\nu} f = \int_{\cup A_\nu} f$.

Απόδειξη

$\Gamma_1 := A_1 \quad , \Gamma_2 := A_2 - A_1, \dots , \quad \Gamma_{\nu+1} := A_{\nu+1} - A_\nu$

$\chi_{\Gamma_{\nu+1}} = \chi_{A_{\nu+1} - A_\nu} = \chi_{A_{\nu+1}} - \chi_{A_\nu}$

$\cup A_\nu = \cup \Gamma_\nu$

$$\int_{\cup A_\nu} f = \int_{\cup \Gamma_\nu} f = \sum \int_{\Gamma_\nu} f$$

—συνεπώς

$$\int_{\Gamma_{\nu+1}} f = \int_{A_{\nu+1}} f - \int_{A_\nu} f$$

$$\int_{\cup A_\nu} f = \int_{\cup \Gamma_\nu} f = \int_{\Gamma_1} f + \dots + \int_{\Gamma_{\nu+1}} f + \dots =$$

$$= \int_{A_1} f + \left(\int_{A_2} f - \int_{A_1} f\right) + \dots + \left(\int_{A_{\nu+1}} f - \int_{A_\nu} f\right) + \dots =$$

$$= \lim \int_{A_\nu} f .$$

Πρόταση

Ας είναι $(f_\nu), (h_\nu) \uparrow$ ακολουθίες $f_\nu \xrightarrow{\text{σημ.}} g$ και $h_\nu \xrightarrow{\text{σημ.}} g$ με $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και h_ν, f_ν απλές.

Νδο $\forall A$: μετρήσιμο ισχύει $\lim_\nu \int_A f_\nu = \lim_\mu \int_A h_\mu$

Απόδειξη

Έστω $V(A) < +\infty$. Τότε $(\forall \lambda \in \mathbb{N})$ (σταθερό) $\exists B_\lambda$ τ/ω $B_\lambda \subseteq A$ και $V(A \setminus B) < \frac{1}{\lambda}$ και $f_\nu \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} g$

τότε $(\exists \nu_\lambda \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq \nu_\lambda)$: $|f_\nu(x) - g(x)| < \frac{1}{\lambda}$, $x \in B_\lambda$

$\Rightarrow f_\nu > g(x) - \frac{1}{\lambda} \geq h_\mu - \frac{1}{\lambda}$, $\forall \mu \in \mathbb{N}$

$\forall n > 0$, $\forall \nu \geq \nu_\lambda$: $V(A \setminus B_\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0 \Rightarrow \int_{A \setminus B_\lambda} h_\mu < n$ ①

$$\int_{B_\lambda} f_\nu \geq \int_{B_\lambda} \left(h_\mu - \frac{1}{\lambda}\right) = \int_{B_\lambda} h_\mu - \frac{1}{\lambda} \cdot V(B_\lambda)$$

$$\int_A f_\nu \geq \int_{B_\lambda} f_\nu \geq \int_{B_\lambda} h_\mu - \frac{1}{\lambda} V(B_\lambda) \geq \int_{B_\lambda} h_\mu - \frac{1}{\lambda} V(A) \overset{①}{\geq}$$

$$\geq \int_{B_\lambda} h_\mu - \int_{A \setminus B_\lambda} (h_\mu - n) - \frac{1}{\lambda} V(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A f_\nu \geq \int_A h_\mu - n - \frac{1}{\lambda} V(A) \quad , \forall \nu \geq \nu_\lambda \, , \forall \mu \in \mathbb{N}$$

όριο ως προς ν

όριο ως προς λ

$$\Rightarrow \lim_\nu \int_A f_\nu \geq \int_A h_\mu - n \Rightarrow \lim_\nu \int_A f_\nu \geq \lim_\mu \int h_\mu - n$$

Το n όμως είναι κάτι που ελέγχουμε εμείς άρα το παραλείπουμε και άρα $\lim_\nu \int_A f_\nu \geq \lim_\mu \int h_\mu$.

Για τη γενική περίπτωση

Έστω $\alpha_{\mu,\nu} := \int_{A_\mu} f_\nu$, $b_{\mu,\nu} := \int_{A_\mu} h_\nu$ όπου $A_\mu := A \cap B(0,\mu)$ για καθε $\mu \in \mathbb{N}$. Έτσι, $\forall \mu \in \mathbb{N}$: $V(A_\mu) < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_\nu \alpha_{\mu\nu} = \lim_\nu b_{\mu,\nu}$ ①

$\alpha_{\mu,\nu}$ και $b_{\mu,\nu}$ αύξουσες ως προς μ και ν και